Fonctions

L'option "mathématiques complémentaires" propose une approche vulgarisée des principales notions de mathématiques dont vous pourrez avoir besoin dans la suite de votre cursus. Ce cours contiendra donc beaucoup d'approches "intuitives" des notions. Pour la définition rigoureuse de ces notions et la preuve des théorèmes présentés, reportez-vous au cours de spécialité mathématiques, disponible sur http ://bardou.maths.free.fr.

1. Composition de fonctions

Définition 1.1 Dire que l'on "compose" des fonctions signifie que l'on les applique les unes à la suite des autres.
Par exemple, la fonction $H(x) = \sqrt{x^3+1}$ est la **composée** de la fonction $f(X) = \sqrt{X}$ et de la fonction $g(x) = x^3 + 1$. On dira que H est la composée de f et de g, et on notera $H = f \circ g$.
Il suffit de se dire que "$f \circ g$" signifie "f *de* g" et on a la bonne définition.
Dans notre exemple, on a pris la racine carrée (f) *de* "$x^3 + 1$".

<u>**Exercice**</u> **1.1** Je vous donne la fonction f et la fonction g, écrivez la composée $f \circ g$ (f "de" g) :

1. $f(X) = \frac{1}{X}$, $g(x) = 3x^2$.
   $f \circ g(x) =$ .... $\frac{1}{3x^2}$ ....
2. $f(X) = X^3$, $g(x) = 2x - 5$.
   $f \circ g(x) =$ .... $(2x-5)^3$ ....
3. $f(X) = \sqrt{X}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
   $f \circ g(x) =$ .... $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$ ....
4. "même pas cap" :$f(X) = X^2$, $g(y) = \frac{1}{y}$, $h(x) = 3x + 2$.
   $f \circ g \circ h(x) =$ .... $\left(\frac{1}{3x+2}\right)^2$ ....

2. Continuité

A. Définition, premiers exemples

Définition 1.2 Intuitivement, dire qu'une fonction est **continue** signifie que l'on peut dessiner sa représentation graphique "sans lever le crayon".

Définition 1.3 On appelle **fonctions polynômes** les fonctions qui sont "fabriquées uniquement à base de puissances de x", comme $4x^6 - \frac{1}{2}x^5 + 7x^2 - 8,5x + \pi$ par exemple).

Propriété 1.1 Les fonctions polynômes, inverse, racine carrée et exponentielle sont continues partout où elles sont définies, ainsi que les fonctions obtenues par somme, produit et composition de ces fonctions.

Exemple 1.1 Les fonctions polynôme, comme $f(x) = \frac{3}{4}x^6 - 6x^2 + \frac{\pi}{2}$, sont continues sur $D_f = \mathbb{R}$. De même pour les fonctions exponentielles.
Les fractions rationnelles ("fractions de polynômes") sont continues sur leur ensemble de définition (là où le dénominateur ne s'annule pas). Par exemple $g(x) = \frac{3x^2-6x+4}{x^3-5x}$ est définie et continue pour $x^3 - 5x \neq 0$, i.e. pour $x \neq 0$ et $x \neq \pm\sqrt{5}$. On dira que g est définie et continue sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; -\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$, ou encore sur $]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5}; 0[\cup]0; \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[$.
Les composées de racines carrées sont continues sur leur ensemble de définition (là où *ce qui est sous la racine* est positif ou nul). Par exemple $h(x) = \sqrt{3x-2}$ est définie et continue pour $3x - 2 \geqslant 0$, i.e. $x \geqslant \frac{2}{3}$. On dira que h est définie et continue sur $D_h = [\frac{2}{3}; +\infty[$.

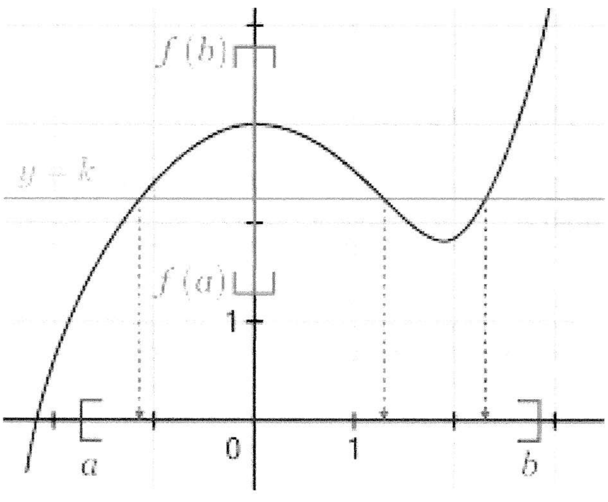
Exercice 1.2 Préciser sur quel ensemble les fonctions suivantes sont définies et continues :

1. $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x - 1$. En tant que polynôme, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $D_f = \mathbb{R}$
2. $g(x) = \frac{5x^2+3}{8x+5}$.
   En tant que fraction rationnelle, g est définie, continue, dérivable sauf pour les valeurs de x qui annulent son dénominateur. $8x+5=0 \iff x = -5/8$
   $D_g = \mathbb{R} - \{-5/8\}$
3. $h(x) = \sqrt{6x+2}$.
   En tant que composée de polynôme et de racine carrée, h est définie continue pour $6x+2 \geqslant 0$, dérivable pour $6x+2>0$
   $D_h = [-\frac{1}{3}; +\infty[$, $\mathcal{D}_{g'} =]-\frac{1}{3}; +\infty[$
4. "même pas cap" :$k(x) = \frac{x^3}{e^x} + \frac{1}{x}$.
   En tant que composée de fractions rationnelles et d'exponentielle, k est définie, continue, dérivable sauf pour les valeurs de x qui annulent un dénominateur.
   $D_k = \mathbb{R}^*$, $\mathcal{D}_{k'} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}^*$.

B. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

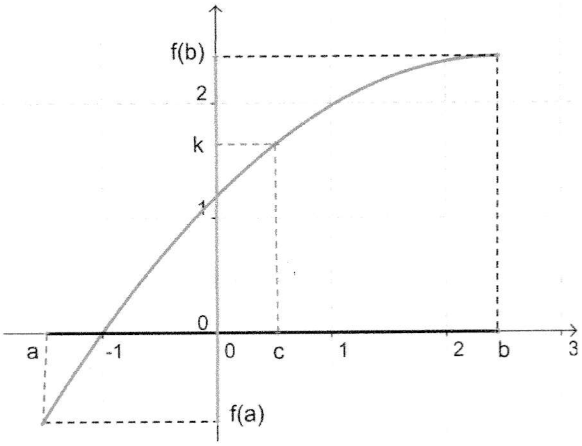
Théorème 1.1 Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle fermé $[a; b]$.
Pour toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
C'est-à-dire que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.
Attention, le TVI assure *l'existence* d'une solution, mais ne dit *rien* sur la *valeur* de cette solution...

Proverbe du jour : "Pas de continuité, pas de TVI !"



Propriété 1.2 Dans le cas particulier où $f(a)$ et $f(b)$ sont **de signes contraires**, le TVI assure que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Propriété 1.3 Dans le cas particulier où f est strictement **monotone** (strictement croissante ou strictement décroissante) sur l'intervalle $]a; b[$, alors l'équation admet une solution **unique**.



Exemple 1.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - 9x + 2$.
Prouver que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1; 3]$

- Continuité : En tant que polynôme, f est définie et *continue* sur $\mathbb{R}$.
- Image des bornes de l'intervalle : $f(1) = 3 - 9 + 2 = -4 < 1$
  $f(3) = 3 \times 9 - 9 \times 3 + 2 = 2 > 1$
- Conclusion : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1; 3]$.

N.B. : Comme ici il s'agit d'une équation du second degré, on peut même la résoudre et trouver la/les solution(s) exacte(s) (avec $\Delta = b^2 - 4ac$ et $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$).
$f(x) = 1 \Longleftrightarrow 3x^2 - 9x + 2 = 1 \Longleftrightarrow 3x^2 - 9x + 1 = 0$
$a = 3, b = -9, c = 1$
$\Delta = 81 - 4 \times 3 \times 1 = 69$
$x_1 = \frac{9 - \sqrt{69}}{6}$ hors de l'intervalle car $0.11 < 1$ (val.app).
$x_2 = \frac{9 + \sqrt{69}}{6}$ est la solution que l'on cherche (env. 2.88).
Il n'y en a qu'une, mais il aurait pu y en avoir plusieurs....

Exercice 1.3 On considère la fonction : $f(x) = x^3 - 12x$.
L'équation $f(x) = 50$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[-3; 6]$?
S'il en existe, en proposer des valeurs approchées.

- En tant que polynôme, f est définie, continue dérivable sur IR.
- $f(-3) = 9 < 50$, $f(6) = 180 > 50$
- D'après le TVI, l'équation $f(x) = 50$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3; 6]$.

Valeur approchée : $x_0 \simeq 4{,}75$

3. Dérivation

A. Définition, premiers exemples

Définition 1.4 Intuitivement, dire qu'une fonction est **dérivable** signifie que sa représentation graphique est "lisse".

Propriété 1.4 Les fonctions polynômes, inverse et exponentielle sont dérivables partout où elles sont définies, ainsi que les fonctions obtenues par somme, produit et composition de ces fonctions.
Attention, la fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}*$ (pas dérivable en 0), et la fonction valeur absolue non plus n'est pas dérivable en 0.

Exemple 1.3 Exemple de rédaction : "En tant que composée de polynôme et d'exponentielle, la fonction $f(x) = e^{2x^2+3}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$".

B. Calcul de la dérivée

Propriété 1.5 On rappelle que :
- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, etc...

La plupart des fonctions de références peuvent donc s'écrire sous forme de puissances, et la formule de dérivation correspondante est : $(x^n)' = nx^{n-1}$.
La fonction exponentielle se dérive en elle-même : $(e^x)' = e^x$.

Propriété 1.6 Dérivation d'une fonction composée : Pour une fonction composée où $f \circ g(x) = f(g(x))$, on a :
$(f(g(x))) = f'(g(x)) \times g'(x)$.

Propriété 1.7 Dérivation d'un produit ou un quotient : $(u \times v)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 1.4 Reprise de l'exemple précédent : "En tant que composée de polynôme et d'exponentielle, la fonction $f(x) = e^{2x^2+3}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$".
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{2x^2+3} \times (2x^2+3)' = e^{2x^2+3} \times 4x = 4xe^{2x^2+3}$.

Exercice 1.4 Pour chacune des fonctions suivantes, rédiger la phrase d'introduction (sur le modèle précédent) et calculer la dérivée :

1. $f(x) = (4x+1)^2$

   En tant que polynôme, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times 4 \times (4x+1) = 8(4x+1)$

   – garder la forme factorisée –

2. $f(x) = \frac{1}{-6x+1}$ En tant que fraction rationnelle, f est définie, continue, dérivable sauf pour les valeurs de x qui annulent son dénominateur.
$-6x+1=0 \Leftrightarrow -6x=-1 \Leftrightarrow x = 1/6$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{6}\}$, $f'(x) = \frac{-(-6)}{(-6x+1)^2} = \frac{6}{(-6x+1)^2}$

3. $f(x) = 5e^{2x+4}$
En tant que composée de polynôme et d'exponentielle, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times 2 \times e^{2x+4} = 10e^{2x+4}$

4. $f(x) = e^{-x^2+x+1}$
En tant que composée de polynôme et d'exponentielle, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x+1}$

5. $f(x) = (e^x+1)^2$
En tant que composée de polynôme et d'exponentielle, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times e^x \times (e^x+1) = 2e^x(e^x+1)$

6. $f(x) = -4e^{x^2}$
En tant que composée de polynôme et d'exponentielle, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4 \times 2x\, e^{x^2} = -8xe^{x^2}$

C. Tableaux de variations

Propriété 1.8 On rappelle que :
Soit f définie et dérivable sur un intervalle I.
- f est **strictement croissante** ssi $f'(x) > 0$
- f est **strictement décroissante** ssi $f'(x) < 0$
- f est **constante** ssi $f'(x) = 0$

L'étude du signe de la dérivée permet donc de dresser le tableau de variations de la fonction.

Pour étudier le signe de $f'(x)$, ils sera souvent pertinent de factoriser son expression.
Proverbe du jour : "Qui dit signe dit factorisation"

Exemple 1.5 Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$. En tant que polynôme, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$. Pour l'étude du signe, se référer au chapitre "Second degré" du cours de première. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 12$. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
$x_1 = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$.
$x_2 = \frac{6+2\sqrt{3}}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$.
Le polynôme est du signe de son coefficient dominant $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines x_1 et x_2.
D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

Exercice 1.5 En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, dresser le tableau de variations de la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ sur l'intervalle $I = [-3; 6]$.

En tant que polynôme, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3$ $\qquad ax^2+bx+c$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$; $\sqrt{\Delta} = 4$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac$

$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$; $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$ $\qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

x	-3		-1		3		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-8	$\nearrow$	$2,67$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	19

"les signe de a à l'extérieur des racines."

Exercice 1.6 La trypsine est une enzyme digestive qui a pour but de digérer les protéines. Son efficacité lors de la digestion dépend du pH x du duodénum, selon la relation :

$$f(x) = 0.37x^3 - 9.35x^2 + 76.51x - 200.95$$

Le pH est compris entre 6 et 9. Ainsi, $x \in [6; 9]$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[6; 9]$.

En tant que polynôme, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0,37 \times 3x^2 - 9,35 \times 2x + 76,51 = 1,11x^2 - 18,7x + 76,51$

$\Delta = (-18,7)^2 - 4 \times 1,11 \times 76,51 = 9,9856$

$x_1 = 7$; $x_2 \simeq 9,8468 \notin [6;9]$

x	6		7		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$1,43$	$\nearrow$	$3,38$	$\searrow$	$0,02$

2. Quel doit être le pH du duodénum pour que l'action de la trypsine soit la plus efficace possible ?

La trypsine est la plus efficace quand la fonction f atteint son maximum, c'est-à-dire pour un pH de $x = 7$.

Exercice 1.7 On considère la fonction f définie sur $[0; 4]$ par :

$$f(x) = 0.1x^2 + 2\sqrt{x} - 4$$

attention, f n'est pas un polynôme.

1. Construire le tableau de variations de f, puis justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

En tant que somme de polynôme et de racine carrée, f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 0{,}1 \times 2x + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0{,}2x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ car $x \in \mathbb{R}^{+*}$

x	0		4
$f'(x)$		$+$	
f	-4	$\nearrow$	$1{,}6$

- f est continue
- $f(0) = -4 < 0$; $f(4) = 1{,}6 > 0$

D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0;4]$.

Comme f est strictement monotone sur cet intervalle, cette solution est unique.

$\alpha \simeq 2{,}65$

2. (a) Calculer $f(2)$. Quel est son signe ? En déduire, entre les intervalles $[0; 2]$ et $[2; 4]$ lequel contient la solution α.

$f(2) \simeq -0{,}772 < 0$ Donc $\alpha \in [2;4]$

(b) Parmi $[2; 3]$ et $[3; 4]$, lequel contient α ?

$f(3) \simeq 0{,}3641 > 0$, donc $\alpha \in [2;3]$

3. Déterminer un encadrement de α à 0.5 près.

$f(2{,}5) \simeq -0{,}213 < 0$, donc $\alpha \in [2{,}5;3]$

$2 < \alpha < 3$:

(Cette méthode s'appelle la dichotomie)

D. Équation de la tangente

Propriété 1.9 On rappelle que : Pour une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$, la tangente à C_f au point d'abscisse a a pour équation :$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Le nombre dérivée $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

Exercice 1.8 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ au point d'abscisse $a = 2$.

En tant que polynôme, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ (voir ex 1.5)

$a = 2$; $f(a) = f(2) = \frac{-19}{3}$; $f'(a) = f'(2) = -3$

$T_2 \,/\, y = -3(x-2) - \frac{19}{3}$

4. Convexité

A. Définition

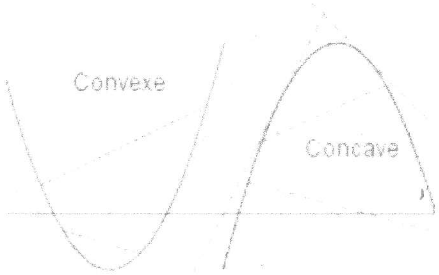
Définition 1.5 Intuitivement, dire qu'une fonction est **convexe** signifie que sa représentation graphique fait un "creux", et dire qu'elle est **concave** que celle-ci fait une "bosse".
Plus rigoureusement, une fonction convexe est *au-dessus de ses cordes*, et une fonction concave est *en-dessous de ses cordes*.

N. B : La plupart des fonctions ne sont ni convexes, ni concaves.

B. Lien avec la dérivation

Propriété 1.10 Pour une fonction f dérivable sur I :

- f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I
- f est concave sur I ssi f' est décroissante sur I



Si f est dérivable, sa dérivée f' est elle aussi une fonction, qui peut éventuellement être dérivable. Dans ce cas, on dira que f est *deux fois dérivable*.
La dérivée de f' s'appelle **dérivée seconde** et se note f''.

Propriété 1.11 Pour une fonction f deux fois dérivable sur I :

- f est convexe sur I ssi $f'' > 0$ sur I
- f est concave sur I ssi $f'' < 0$ sur I

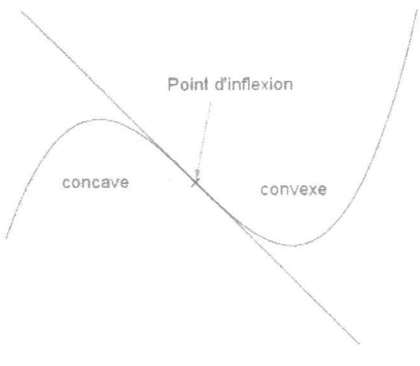
Exemple 1.6 Soit $f(x) = -3x^2 + 7$. Étudions sa convexité sur $\mathbb{R}$.
En tant que polynôme, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -6x + 7$. f' est aussi dérivable en tant que polynôme.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -6$. f'' est négative, donc f est concave sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.9 Déterminer la convexité (convexe ou concave) de la fonction $f(x) = 10e^{-0.5x} + 2$.
En tant que composée de polynôme et d'exponentielle, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 10 \times (-0,5) e^{-0,5x} = -5e^{-0,5x}$
$f''(x) = -5 \times (-0,5) e^{-0,5x} = 2,5e^{-0,5x} > 0$ car l'exponentielle est positive
Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

C. Point d'inflexion

Définition 1.6 Intuitivement, une fonction représente un **point d'inflexion** lorsque "si c'était un toboggan, à cet endroit, on décollerait".
Plus rigoureusement, la fonction présente un point d'inflexion si en ce point, la courbe traverse sa tangente.

En un point d'inflexion, la fonction change de concavité, la dérivée seconde change de signe. (et s'annule)



Exercice 1.10 Une entreprise fabrique des bouteilles toutes identiques, entre 20 000 et 70 000 par mois. Pour une quantité q produite, en milliers, on estime que les coûts de production, en milliers d'euros, sont :

$$C(q) = 0.005(q-40)^3 + 0.1q + 50$$

, où $20 \leqslant q \leqslant 70$

1. (a) Montrer que la courbe représentative de C admet un point d'inflexion en $x = 40$.
En tant que polynôme, C est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall q \in \mathbb{R}$, $C'(q) = 0{,}005 \times 3 \times (q-40)^2 + 0{,}1$

$C''(q) = 0{,}005 \times 3 \times 2 \times (q-40) = 0{,}03q - 1{,}2$

$C''(q) = 0 \iff 0{,}03q - 1{,}2 = 0 \iff q = 40$

Donc C admet un point d'inflexion en $q = 40$

(b) Étudier la convexité de la fonction C.

$C''(q) = 0{,}03q - 1{,}2$, $\begin{cases} C''(q) > 0 \text{ pour } q > 40 & (\text{Convexe}) \\ C''(q) < 0 \text{ pour } q < 40 & (\text{Concave}) \end{cases}$

2. On rappelle que le **coût marginal** est assimilé à la dérivée du coût total : $C_m(q) = C'(q)$.

(a) Montrer que le coût marginal est minimal en 40.

$C_m(q) = 0{,}015\,(q-40)^2 + 0{,}1$ et $C'_m(q) = C''(q)$

D'après ce qui précède on a :

x	20		40		70
$C'_m(q)$		$-$	0	$+$	
$C_m(q)$	$6{,}1$	$\searrow$	$0{,}1$	$\nearrow$	$13{,}6$

Donc C_m est bien minimal pour $q = 40$.

(b) Mettre en relation les variations du coût marginal et C_m et la convexité du coût total C.

Le coût marginal diminue lorsque le coût total est concave, et le coût marginal augmente lorsque le coût total est convexe.